Aula 11

Cálculo funcional para operadores não limitados

Seja E um esp. de Banach e $A: D(A) \subset E \to E$ um op-r não limitado com $\rho(A) \neq \emptyset$ e $D(A) \neq E$.
$\Rightarrow$ o espectro $\sigma(A)$ é fechado mas pode ser não limitado. Idea é "compactificar" $\sigma(A)$.
Seja $\alpha \in \rho(A) \Rightarrow \sigma((\alpha - A)^{-1})$ é compacto. Consideremos o plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
$\mathbb{C}_\infty$ é espaço topologico compacto e transformação de Möbius $\eta(\lambda) = (\alpha - \lambda)^{-1}$ é o homeomorfismo de $\mathbb{C}_\infty$ em $\mathbb{C}_\infty$.

Lema 1 $\eta(\sigma(A) \cup \{\infty\}) = \sigma((\alpha - A)^{-1})$ (0)

Demonstração Observe que $\eta(\infty) = 0 \in \sigma((\alpha - A)^{-1})$ já que $R((\alpha - A)^{-1}) \neq E$. Agora usaremos

$$\lambda - A = (\alpha - \lambda)\left((\alpha - \lambda)^{-1} - (\alpha - A)^{-1}\right)(\alpha - A), \ \lambda \neq \alpha \quad (1)$$

Como $\alpha \notin \sigma(A)$, de (1) segue que $\lambda \in \sigma(A)$ sse $\eta(\lambda) = (\alpha - \lambda)^{-1} \in \sigma((\alpha - A)^{-1})$. Finalmente (0) vale.

Observação De (0) e o fato que η é homeomorfismo podemos concluir que $\sigma(A) \cup \{\infty\}$ é compacto em $\mathbb{C}_\infty$.

Def. Por $\mathcal{F}_\infty(A)$ vamos denotar a familia das funções analíticas ~~ao~~ num conjunto aberto em $\mathbb{C}_\infty$ contendo $\sigma(A)$ e ∞.

Def 2 Seja $f \in \mathcal{F}_\infty(A) \Rightarrow f \circ \eta^{-1}$ é analítica na vizinhança aberta de $\sigma((\alpha - A)^{-1})$ (ou seja $f\circ\eta^{-1} \in \mathcal{F}((\alpha-A)^{-1})$) (2)

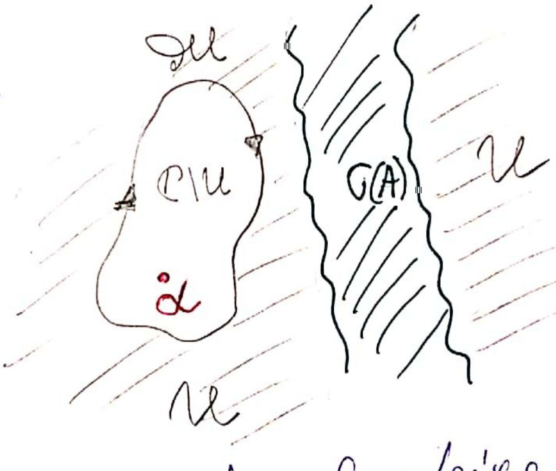
$\Rightarrow (f\circ\eta^{-1})((\alpha-A)^{-1}) \in B(E)$ pode ser definido como na Def 2 da aula 10. Portanto faz sentido a seguinte definição:

$$f(A) := (f\circ\eta^{-1})((\alpha-A)^{-1}),\ f \in \mathcal{F}_\infty(A) \quad (2)$$

Teorema 2 Seja $f \in \mathcal{F}_\infty(A)$. Suponha que existe vizinhança aberta Ω de $\sigma(A)$ em $\mathbb{C}_\infty$ tal que $\infty \in \mathcal{U}$, f é analítica em Ω. E seja um aberto $\mathcal{U}$ tal que $\sigma(A) \subset \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}} \subset \Omega$ e $\partial\mathcal{U}$ é uma curva simples, fechada, retificável, orientada no sentido horário (ou seja orientada positivamente já que $\mathcal{U}$ está no exterior de $\partial\mathcal{U}$) $\Rightarrow$

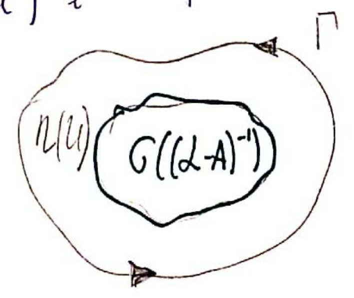
$$f(A) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{U}} f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda \quad (3)$$

Demonstração Seja $\alpha \in \rho(A)$.



Como $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}$ é analítica em $\rho(A)$, a integral em (3) não depende de $\partial\mathcal{U}$. Logo, pode-se assumir que $\alpha \notin \overline{\mathcal{U}}$.

Usando (0), concluímos que $\eta(\mathcal{U}) \supset \sigma((\alpha-A)^{-1})$ e $\Gamma = \eta(\partial\mathcal{U})$ é a fronteira
vizinhança aberta
orientada positivamente.



Seja $B = (\alpha - A)^{-1}$, $z = (\alpha-\lambda)^{-1}$ e $\alpha \neq \lambda \in \rho(A)$.

Сканировано с CamScanner

$\Rightarrow (\lambda - A)^{-1} = zB(z-B)^{-1} = z(-I + z(z-B)^{-1})$.

Usando mudança de variável $\lambda = \eta^{-1}(z) = \alpha - z^{-1}$,

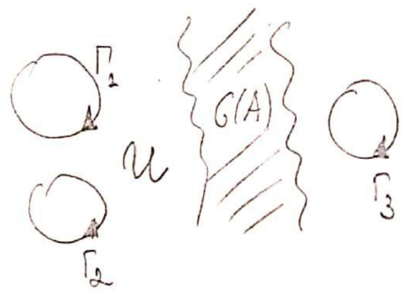
obtemos $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\eta^{-1}(z))(-z^{-1}I + (z-B)^{-1}) dz$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma} \frac{-f(\eta^{-1}(z))}{(z-0)^{-1}} dz\right) I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\eta^{-1}(z))(z-B)^{-1} dz =$$

$$= -f(\eta^{-1}(0))I + (f\circ\eta^{-1})(B) \underset{(2)}{=} -f(\infty)I + f(A).$$

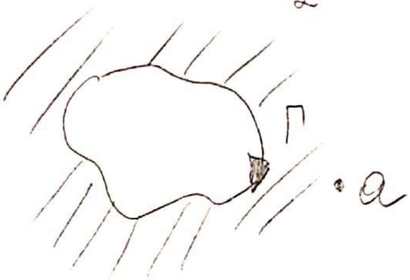
<u>Observação</u> 1) Observe que assume-se que $\mathbb{C}\setminus U$ é um compacto.

2) O Teorema 1 vale para o caso $\partial U = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j$, onde Γ_j é simples, fechada, retificável.



3) Formula (3) é análoga à formula de Cauchy para os domínios não limitados:

$$f(a) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} d\lambda$$



<u>Teorema 2</u> Sejam $f, g \in \mathcal{F}_\infty(A) \Rightarrow$

1) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$, $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$, $\alpha \in \mathbb{C}$

2) $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

3) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A) \cup \{\infty\})$

mostre isso!

<u>Ex 1</u> Seja $E = L^1[0,\infty)$, $Ax = \cancel{x}'$,

$D(A) = \{y \in E : y$ é absolutamente cont. em $[0,b]$, $\forall b > 0$ e $y' \in E\}$

(Observe que se y for abs-te cont $\Rightarrow \exists y'(t)$ q.t.p.)

Mostremos que $\sigma(A) = \{\lambda : Re\lambda \leq 0\} = \overline{\mathbb{C}_\varepsilon^-}$ ou (4)

~~$\rho(A) = \{\lambda$~~ • Seja λ tal que $Re\lambda > 0$. Mostremos que $\lambda \in \rho(A)$.

<u>$\lambda - A$ injetor</u>: $(\lambda - A)y = 0 \Rightarrow y = Ce^{\lambda t} \notin L^1[0,\infty)$ se $C \neq 0$.

<u>$\lambda - A$ sobrejetor</u>: Seja $g \in E$. Consideremos $(\lambda - A)y = g$ ou $\lambda y - y' = g \Rightarrow y(t) = e^{\lambda t}\left(C - \int_0^t e^{-\lambda s} g(s)\,ds\right)$.

Suponha que $C = \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(s)\,ds \Rightarrow$

$$y(t) = e^{\lambda t}\int_t^\infty e^{-\lambda s} g(s)\,ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(t+s)\,ds. \quad (4)$$

É fácil ver que $(4) \in D(A) \Rightarrow \lambda - A$ é sobrejetor.

Observe que $(\lambda - A)^{-1} g = \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(t+s)\,ds \Rightarrow$

$$\|(\lambda - A)^{-1} g\| \leq \int_0^\infty |e^{-\lambda s}|\,\|g\|\,ds = -\frac{1}{Re\lambda} e^{-Re\lambda s}\Big|_0^\infty \|g\| = \frac{1}{Re\lambda}\|g\|$$

$\Rightarrow \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda} \Rightarrow \{\lambda : Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$

$\Rightarrow \sigma(A) \subseteq \overline{\mathbb{C}_\varepsilon^-}$.

• Mostremos que $\overline{\mathbb{C}_\varepsilon^-} \subseteq \sigma(A)$. Se $Re\lambda < 0 \Rightarrow$ λ é autovalor com autovetor $y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow$ $\mathbb{C}_\varepsilon^- \subseteq \sigma(A) \Rightarrow \overline{\mathbb{C}_\varepsilon^-} \subseteq \sigma(A)$ (como $\sigma(A)$ é fechado)

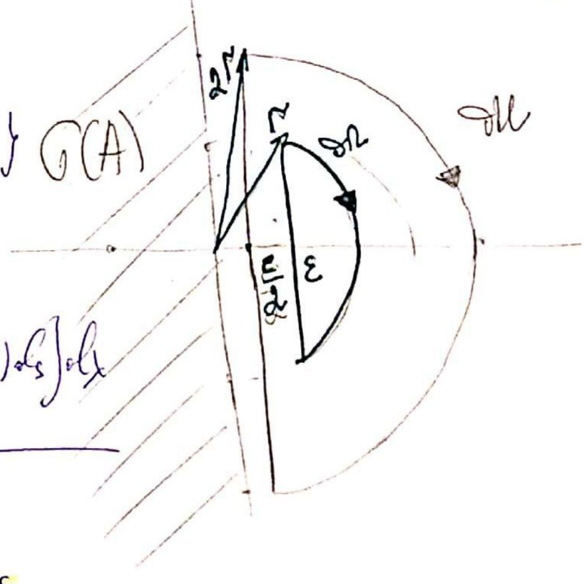
use a definição do $\mathcal{F}_\infty(A)$ para provar isso

Seja $f \in \mathcal{F}_\infty(A) \Rightarrow \exists\, r > 0, \varepsilon > 0$ tais que f é analítica em $\{\lambda : |\lambda| > r\} \cup \underbrace{\{\lambda \mid Re\lambda < \varepsilon\}}_{\mathbb{C}_\varepsilon} := \Omega$

Сканировано с CamScanner

Em particular, f é analítica em $\overline{U}$, onde

$U = \{\lambda : |\lambda| > 2r\} \cup \{\lambda : Re\,\lambda < \frac{\varepsilon}{2}\}$



$\Rightarrow$

$$(f(A)g)(t) = f(\infty)g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(\lambda)\left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(t+s)\,ds\right]d\lambda$$

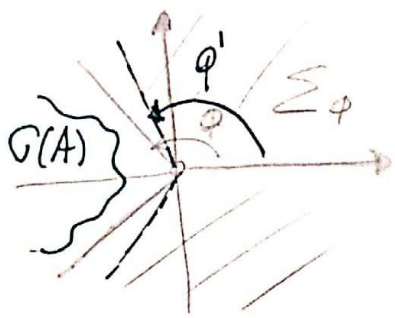
Operadores setoriais

Seja $\varphi \in (0, \pi]$, definimos $\Sigma_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg \lambda| < \varphi\}$

Observe que $\Sigma_\pi = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

Def 3 Sejam E um esp. de Banach e $A: D(A) \subseteq E \to E$ um op.-r fechado $\Rightarrow$ A é dito setorial do ângulo $\varphi \in (0, \pi]$ se existir uma constante $K > 0$ tal que $\Sigma_\varphi \subseteq \rho(A)$ e $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{K}{|\lambda|}$, $\lambda \in \Sigma_\varphi$.

Observação Se A for setorial do ângulo φ $\Rightarrow$ ele é setorial do ângulo $\varphi' \in (0, \varphi)$.



Ex 2 Seja $E = C[0,1]$, $D(A) = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$, $(Au)(t) = u''(t)$. $\Rightarrow$ A é setorial do ângulo $\varphi < \pi$.

Demonstração Lembre que $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{-\pi^2 k^2, k \in \mathbb{N}\}$

Seja $\lambda \in \Sigma_\pi$ e $\lambda = \mu^2$ para algum $\mu \in \mathbb{C}$ com $Re\,\mu > 0$

Seja $f \in E$, como $\lambda \in \rho(A) \supset \Sigma_\pi$, existe única (6)

função $u \in D(A)$ tal que $\lambda u - Au = f$, ou seja

$u \in C^2[0,1]$, $u'' = \mu^2 u - f$ em $[0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$ (5)

A solução da (5) tem forma:

$$u(t) = a e^{\mu t} + b e^{-\mu t} + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 e^{-\mu|t-s|} f(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(0) = a + b + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 e^{-\mu s} f(s)\,ds = 0$$

$$u(1) = a e^{\mu} + b e^{-\mu} + \frac{e^{-\mu}}{2\mu}\int_0^1 e^{\mu s} f(s)\,ds = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(f,\mu) \\ b(f,\mu) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu(e^{-\mu} - e^{\mu})}\begin{pmatrix} e^{-\mu}\int_0^1 (e^{\mu s} - e^{-\mu s}) f(s)\,ds \\ \int_0^1 (e^{\mu} e^{-\mu s} - e^{-\mu} e^{\mu s}) f(s)\,ds \end{pmatrix}$$

Temos

$$R_{\mu^2}(A) f(t) = a(f,\mu) e^{\mu t} + b(f,\mu) e^{-\mu t} + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 e^{-\mu|t-s|} f(s)\,ds,$$

$\forall\, \mu^2 = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \Sigma_\pi$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $f \in E$, $t \in [0,1]$

Seja $\varphi \in (0,\pi)$ fixo. Pegue $\lambda \in \Sigma_\varphi$ e logo $\mu \in \Sigma_{\frac{\varphi}{2}}$.

Temos $\mu = |\mu| e^{i\theta}$ com $0 \le |\theta| < \frac{\varphi}{2}$ e $\operatorname{Re}\mu = |\mu|\cos\theta \ge$

$\ge |\mu| \cos\frac{\varphi}{2}$. $\Rightarrow$

$$\|R_\lambda(A) f\| \le |a(f,\mu)| e^{\operatorname{Re}\mu} + |b(f,\mu)| + \frac{\|f\|}{2|\mu|}\sup_{t\in[0,1]}\int_{t-1}^{t} e^{-\operatorname{Re}\mu|r|}\,dr$$

$$\le \frac{\|f\|}{2|\mu||e^{\mu} - e^{-\mu}|}\left[\int_0^1 (e^{\operatorname{Re}\mu s} + e^{-\operatorname{Re}\mu s})\,ds + \int_0^1 (e^{\operatorname{Re}\mu} e^{-\operatorname{Re}\mu s} + e^{-\operatorname{Re}\mu} e^{\operatorname{Re}\mu s})\right]$$

$$+ \frac{\|f\|}{|\mu|\operatorname{Re}\mu} = \frac{\|f\|}{2\operatorname{Re}\mu|\mu||e^{\mu} - e^{-\mu}|}\Big[(e^{\operatorname{Re}\mu} - 1 + 1 - e^{-\operatorname{Re}\mu}) +$$

$$+ e^{\operatorname{Re}\mu}(1 - e^{-\operatorname{Re}\mu}) + e^{-\operatorname{Re}\mu}(e^{\operatorname{Re}\mu} - 1)\Big] + \frac{\|f\|}{|\mu|\operatorname{Re}\mu}$$

$$\le \frac{1}{|\mu|^2\cos(\varphi/2)}\|f\|\left[\frac{(e^{Re\mu}-e^{-Re\mu})+(e^{Re\mu}-e^{-Re\mu})}{2(e^{Re\mu}-e^{-Re\mu})}+1\right]$$

$$=\underbrace{\frac{2}{\cos(\varphi/2)}}_{K}\frac{1}{|\lambda|}\|f\|.$$

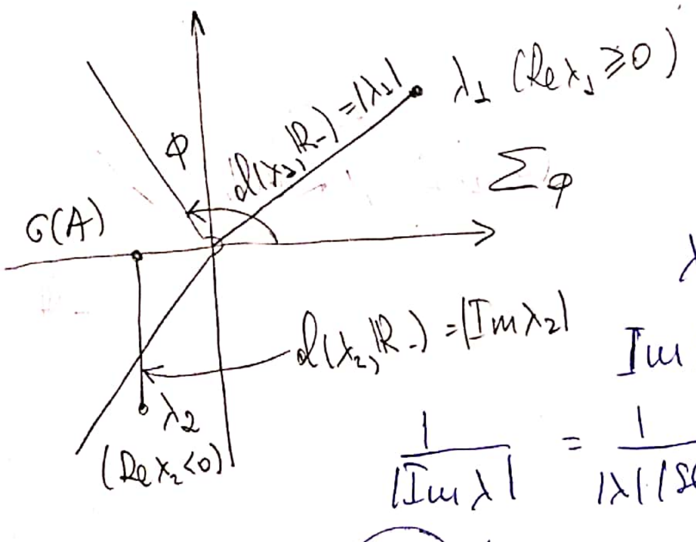
__Exercício__ Mostre que operador $A_1 u = u''$ com $D(A_1)=\{u\in C^2[0,1] : u'(0)=u'(1)=0\}$ é setorial para todo ângulo $\varphi<\pi$ e $\sigma(A_1)=\sigma_p(A_1)=\{-\pi^2k^2, k\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$.

__Ex3__ Sejam H um esp. de Hilbert e $A: D(A)\subseteq H\to H$ um operador fechado com $\overline{D(A)}=E$ tal que $(Ax,x)\le 0\ \forall x\in D(A)$. $\Rightarrow$ A é setorial do ângulo $\varphi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

__Demonstração__ Pela Proposição 2.8 (P.29) do livro de Schmudgen obtemos para $\varphi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ e $\lambda\in\Sigma_\varphi$:

$$\|R_\lambda(A)\|\le d^{-1}(\lambda,\mathbb{R}_-) = \begin{cases}\frac{1}{|\lambda|}, & Re\lambda\ge 0\\ \frac{1}{|Im\lambda|}, & Re\lambda<0\end{cases}$$

já que $\Theta(A)\subseteq\mathbb{R}_-$



Se $Re\lambda<0$ $\Rightarrow$

$\lambda=|\lambda|e^{\pm i\theta}$, $\theta\in(\frac{\pi}{2},\varphi)$ $\Rightarrow$

$Im\lambda=\pm|\lambda|\operatorname{sen}\theta$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{|Im\lambda|}=\frac{1}{|\lambda||\operatorname{sen}\theta|}\le\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi|\lambda|} \Rightarrow$$

$$\|R_\lambda(A)\|\le\underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}}_{=K}\frac{1}{|\lambda|},\ \lambda\in\Sigma_\varphi. \Rightarrow$$

Observe que pela mesma Prop. 2.8, $\Sigma_\varphi\subseteq\rho(A)$.